MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 10
23.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Die gegebene DGL
$$y''' + y'' + 4y = \cos x \qquad (*)$$
ist eine inhomogene lineare DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Wir betrachten zuerst die homogene lineare DGL
$$y''' + y'' + 4y = 0, \qquad (*_0)$$
Allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$
$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4 \; = \; (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 2)$$
hat die drei Nullstellen $\lambda_1 = -2$ (reell, einfach), $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$ (komplex, einfach) sowie $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$ (komplex, einfach).
Ein Fundamentalsystem von $(*_0)$ besteht damit aus den 3 linear unabhängigen Funktionen
$$\varphi_1(x) = e^{-2x}, \qquad \varphi_2(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cos(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x), \qquad \varphi_3(x) = e^{\frac{1}{2}x} \sin(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit
$$\varphi_{c_1,c_2,c_3}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x) + c_3 e^{\frac{1}{2}x} \sin(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$
Partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x} \cos(kx) = \cos(x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ und $a = 0, k = 1$. Da $a + ki = i$ **keine** Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist die Vielfachheit $\alpha = 0$, also ist $m + \alpha = 0 + 0 = 0$.

Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz
$$\varphi_p(x) = q_1(x)\, e^{ax} \cos(kx) + q_2(x) e^{ax} \sin(kx) = r_1 \cos x + r_2 \sin x$$
mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1$ und $q_2(x) = r_2$ jeweils vom Grade $m + \alpha = 0$.
Es ist dann
$$\begin{aligned} \varphi_p'(x) &= -r_1 \sin x + r_2 \cos x \\ \varphi_p''(x) &= -r_1 \cos x - r_2 \sin x \\ \varphi_p'''(x) &= r_1 \sin x - r_2 \cos x \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\varphi_p \text{ Lösung von } (*) &\iff \varphi_p'''(x) + \varphi_p''(x) + 4\varphi_p(x) = \cos x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff r_1 \sin x - r_2 \cos x \ - r_1 \cos x - r_2 \sin x + 4(r_1 \cos x + r_2 \sin x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff (3r_1 - r_2 - 1)\cos x + (r_1 + 3r_2)\sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 3r_1 - r_2 - 1 = 0 \quad \wedge \quad r_1 + 3r_2 = 0 \\
&\iff 3r_1 - r_2 - 1 = 0 \quad \wedge \quad r_1 = -3r_2 \\
&\iff r_2 = -\frac{1}{10} \quad \wedge \quad r_1 = \frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist

$$\varphi_p(x) = \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x) + c_3 e^{\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x) \\
& + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2. Wir betrachten die inhomogene lineare lineare DGL

$$y'' + 2ky' + k^2 y = 3x^2 - 2, \tag{$*$}$$

sowie homogene lineare DGL

$$y'' + 2ky' + k^2 y = 0. \tag{$*_0$}$$

a) Wir bestimmen die allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2k\lambda + k^2 = (\lambda + k)^2$$

hat die Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -k$ (reell, doppelt).
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 x\, e^{-kx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da nun $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-kx} = 0$ und auch nach l'Hospital $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-kx} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{kx}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{ke^{kx}} = 0$, gilt für alle Lösungen φ_{c_1,c_2} von $(*_0)$, daß $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi_{c_1,c_2}(x) = 0$.

b) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 3x^2 - 2$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da 0 keine Nullstelle von χ ist (beachte, daß $k > 0$), ist also ist die Vielfachheit $\alpha = 0$.
Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{ax} = rx^2 + sx + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = rx^2 + sx + t$ vom Grade $m + \alpha = 2 + 0 = 2$. Es ist dann

$$
\begin{aligned}
\varphi_p'(x) &= 2r\,x + s \\
\varphi_p''(x) &= 2r
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi_p \text{ Lösung von } (*) &\iff \varphi_p''(x) + 2k\varphi_p'(x) + k^2\varphi_p(x) = 3x^2 - 2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 2r + 2k(2rx + s) + k^2(rx^2 + sx + t) = 3x^2 - 2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 2r + 4krx + 2ks + k^2rx^2 + k^2sx + k^2t = 3x^2 - 2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff (k^2r - 3)x^2 + (4kr + k^2s)x + (2r + 2ks + k^2t + 2) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff k^2r - 3 = 0 \ \wedge \ 4kr + k^2s = 0 \ \wedge \ 2r + 2ks + k^2t + 2 = 0 \\
&\iff r = \frac{3}{k^2} \ \wedge \ s = -\frac{12}{k^3} \ \wedge \ t = \frac{18}{k^4} - \frac{2}{k^2}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_p(x) = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{12}{k^3}x + \frac{18}{k^4} - \frac{2}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:

Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1e^{-kx} + c_2x\,e^{-kx} + \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{12}{k^3}x + \frac{18}{k^4} - \frac{2}{k^2}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - xy + y^2 + 5x - 4y + 2 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 2 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det A = 3 - \frac{1}{4} > 0$$

ist Q eine Ellipse oder ein Punkt oder die leere Menge.

b) Da nun für $y = 0$ die Gleichung

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

zwei verschiedene (reelle) Lösungen besitzt, nämlich

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6}, \qquad \text{also } x_1 = -1, \ x_2 = -\frac{2}{3},$$

liegen also mindestens zwei Punkte auf Q, nämlich $\binom{-1}{0}$ und $\binom{-\frac{2}{3}}{0}$; also muß Q eine Ellipse sein.

Genauso hätte auch ($x = 0$) die Gleichung

$$y^2 - 4y + 2 = 0$$

zwei verschiedene (reelle) Lösungen, nämlich $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$; also liegen auch die zwei Punkte $\binom{0}{2+\sqrt{2}}$ und $\binom{0}{2-\sqrt{2}}$ auf Q,

Wir haben somit also Schnittpunkte von Q mit den beiden Koordinatenachsen gefunden.

4. a) Die Gleichung

$$x^2 + 2sxy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \qquad (*)$$

läßt sich mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$$

schreiben. Dabei entscheidet das Vorzeichen von $\det A$, zu welcher der angegebenen Typenklassen Q gehört. Mit $\det A = 1 - s^2$ folgt:

- $|s| < 1 \iff Q$ ist Ellipse, Punkt oder $\varnothing$
- $|s| > 1 \iff Q$ ist Hyperbel oder sich schneidendes Geradenpaar
- $|s| = 1 \iff Q$ ist Parabel, paralleles Geradenpaar, Doppelgerade oder $\varnothing$

b) Für $s = 1$ ist unter zweimaliger Verwendung der binomischen Formel

$$\begin{aligned} (*) &\iff x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \\ &\iff (x+y)^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \\ &\iff (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 0 \\ &\iff (x+y+1)^2 = 0 \\ &\iff y = -x - 1 \end{aligned}$$

Damit ist Q eine Doppelgerade, und zwar

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x - 1 \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$